

PII: S0040-9383(97)00098-0

UNE PROPRIÉTÉ DYNAMIQUE DES HOMÉOMORPHISMES DU
PLAN AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE D'INDICE > 1

PATRICE LE CALVEZ

(Received 28 April 1997; in revised form 3 November 1997)

Nous montrons qu'un homéomorphisme f du plan préservant l'orientation défini au voisinage d'un point fixe isolé d'indice de Lefschetz strictement supérieur à 1 admet dans ce voisinage un domaine positivement ou négativement errant. Une telle situation est bien sûr impossible quand f préserve l'aire et l'indice est donc nécessairement inférieur ou égal à 1. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

We prove that every orientation preserving homeomorphism f of the plane defined locally around an isolated fixed point of Lefschetz index strictly larger than 1 has a positively or negatively wandering domain in this neighbourhood. Such a situation cannot occur when f is area preserving and the index must be smaller or equal to 1. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

INTRODUCTION

En 1974, Nikishin [7] et Simon [12] ont démontré indépendamment que l'indice de Lefschetz d'un point fixe isolé est toujours inférieur ou égal à 1 pour un difféomorphisme de classe C^1 du plan préservant l'aire et l'orientation. Utilisant la notion de fonction génératrice, le calcul de cet indice se ramène au calcul de l'indice d'un champ de gradient symplectique en une singularité isolée, or l'indice d'un tel champ est toujours inférieur ou égal à 1. Cette démonstration ne convient pas au cas des homéomorphismes car on n'a pas de fonction génératrice. Cependant en 1987 Pelikan et Slaminka [8] ont donné une preuve topologique du même résultat dans le cas des homéomorphismes (la mesure invariante est choisie régulière par rapport à la mesure de Lebesgue). Leur preuve commence par une série de remarques simples mais puissantes et se développe ensuite en une partie plus difficile: la mise en position canonique d'une courbe fermée simple et de son image. Cette notion apparaît également chez Schmitt [10, 11] ainsi que dans [12]. Il semble que les arguments donnés par Pelikan et Slaminka sont incomplets, on pourra cependant trouver les arguments manquants sur la mise en position canonique dans la thèse de Bonino [1].

Le but de cet article est de donner une démonstration simple du résultat précédent en essayant de développer au maximum les premiers arguments de la preuve de Pelikan et Slaminka pour aboutir à une situation étudiée avec Yoccoz dans [6]. On obtient alors naturellement un résultat plus général et purement topologique qui s'énonce ainsi:

THÉORÈME. *Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 et ayant 0 comme seul point fixe. Si l'indice de Lefschetz de 0 est strictement supérieur à 1, alors deux cas sont possibles:*

- (i) *il existe un domaine $V \subset W$ tel que la suite $f^n(V)_{n \geq 0}$ est bien définie et formée de parties deux-à-deux disjointes de W ;*

(ii) il existe un domaine $V \subset W'$ tel que la suite $f^n(V)_{n \leq 0}$ est bien définie et formée de parties deux-à-deux disjointes de W' .

On en déduit bien évidemment le théorème de Pelikan-Slaminka (il suffit que la mesure invariante charge les ouverts); on en déduit également le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *L'indice de chaque point isolé est inférieur ou égal à 1 pour un homéomorphisme d'une surface orientable préservant l'orientation et n'ayant pas de point errant.*

Je tiens à remercier Lucien Guillou pour ses précieuses remarques.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

Nous noterons \bar{X} l'adhérence d'une partie X du plan euclidien orienté \mathbf{R}^2 et ∂X sa frontière, nous rappelons qu'un *domaine* de \mathbf{R}^2 est une partie ouverte connexe et non vide.

Par définition, une *courbe de Jordan* est une courbe fermée simple du plan euclidien \mathbf{R}^2 et la composante connexe du complémentaire qui est bornée est un *domaine de Jordan*. L'orientation de \mathbf{R}^2 définit une orientation naturelle sur le cercle unité S^1 et plus généralement sur toute courbe de Jordan.

Si ξ est un champ de vecteurs continu et ne s'annulant pas, défini sur une courbe de Jordan C , l'indice $i(\xi, C)$ de ξ le long de C est le degré de l'application

$$\theta \mapsto \frac{\xi(\gamma(\theta))}{\|\xi(\gamma(\theta))\|}$$

pour toute paramétrisation $\gamma: S^1 \rightarrow C$ de C par le cercle unité S^1 qui préserve l'orientation. Si l'application $z \mapsto \xi(z) + z$ prend ses valeurs dans l'adhérence du domaine de Jordan U bordé par C , alors l'indice est égal à 1. En effet, utilisant le théorème de Schoënfliès on construit aisément une famille de champs de vecteurs continus ξ_t sur C , dépendant continûment de $t \in [0, 1]$, telle que $\xi_0 = \xi$, telle que chaque application $z \mapsto \xi_t(z) + z$ est à valeurs dans U quand $t \in]0, 1]$ et telle que ξ_1 est de la forme $z \mapsto z^* - z$, où z^* est un point de U . Par la même formule, ξ_1 se prolonge en un champ de vecteurs sur \mathbf{R}^2 ayant une unique singularité en z^* . L'indice du champ de vecteurs sur une courbe de Jordan ne dépend que de la classe d'homotopie de cette courbe sur $\mathbf{R}^2 - \{z^*\}$. En particulier l'indice le long de C est égal à l'indice le long d'un cercle centré en z^* et donc à 1. Pour exactement les mêmes raisons, si $z \mapsto \xi(z) + z$ prend ses valeurs dans l'adhérence d'un domaine de Jordan U' disjoint de U , l'indice est nul.

Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 et n'ayant que 0 comme point fixe. L'indice du champ de vecteurs $\xi: z \mapsto f(z) - z$ le long du bord de tout domaine de Jordan U contenant 0 dont l'adhérence est dans W est indépendant de U , c'est l'indice de Lefschetz de 0 que l'on notera $i(f, 0)$. L'indice ne dépend que du germe de f en 0, il est invariant par conjugaison et on a $i(f, 0) = i(f^{-1}, 0)$.

L'indice de Lefschetz se calcule facilement dans les situations classiques suivantes (Fig. 1).

Dans le cas (a), il existe un domaine de Jordan U dont l'adhérence est dans W qui est invariant, l'indice est alors égal à 1; dans le cas (b), le domaine de Jordan est un attracteur (l'image de \bar{U} est contenue dans U) et l'indice est encore égal à 1; dans le cas (c) qui correspond à un point selle d'un difféomorphisme, l'indice est 1 si les valeurs propres sont négatives (cas avec réflexion) et -1 si elles sont positives (cas sans réflexion); dans le cas (d)

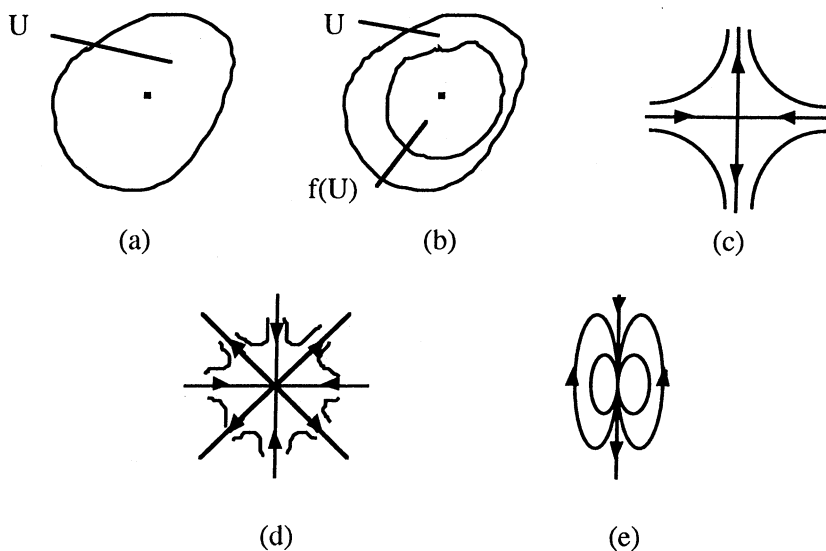


Fig. 1.

qui est un point selle dégénéré, l'indice est égal à 1 moins le nombre de demi-variétés stables invariantes (-3 sur le dessin); enfin le cas (e) est l'exemple classique d'un point fixe d'indice $+2$ avec deux domaines elliptiques. Remarquons que dans ce dernier cas tout voisinage de 0 contient l'orbite d'un domaine errant. Notons également, par la remarque sur les champs de vecteurs faite plus haut, que s'il existe un domaine de Jordan dont l'adhérence est dans W qui est positivement invariant, l'indice est 1, situation qui généralise les deux premiers cas.

2. IDÉE DE LA DÉMONSTRATION

L'idée générale de la démonstration est de caculer l'indice dans des situations se rapprochant des situations classiques que l'on vient de rappeler.

Le premier résultat est une version locale du lemme de Brouwer sur les arcs de translations. On trouve déjà tous les ingrédients de la démonstration dans [8], on peut l'énoncer ainsi:

PROPOSITION 1. *Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages simplement connexes de 0 et n'ayant que 0 comme point fixe. Soit W'' la composante connexe de 0 dans $W \cap f^{-1}(W)$. S'il existe un domaine $V \subset W''$ tel que $f(V) \cap V = \emptyset$, un point $z \in V$ et un entier $q \geq 2$ tel que $f^i(z) \in W''$ pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$ et $f^q(z) \in V$, alors $i(f, 0) = 1$.*

Le résultat dit en particulier que s'il existe une orbite périodique contenue dans W'' , où même une orbite récurrente, l'indice est 1. C'est une généralisation du cas (a) que l'on peut qualifier de situation "elliptique". Remarquons que cette situation est stable: tout homéomorphisme $f^*: W \rightarrow W'$ préservant l'orientation n'ayant que 0 comme point fixe et uniformément proche de f vérifie la même hypothèse. Nous donnerons la démonstration dans

la Section 5. Le lemme de Brouwer sur les arcs de translation s'applique aux homéomorphismes de \mathbf{R}^2 , il faudra donc étendre convenablement f au plan (nous introduirons dans la Section 3 la notion de bonne extension), puis utiliser la notion de modification libre, notion fondamentale dans cet article, que l'on rappellera dans la Section 4.

Le second résultat se trouve dans [6] et s'énonce ainsi:

PROPOSITION 2. *Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 n'ayant que 0 comme point fixe. S'il existe un domaine de Jordan U , dont l'adhérence est dans W et tel que $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\bar{U}) \subset U$, alors $i(f, 0) \leq 1$.*

Cette situation peut être qualifiée d'hyperbolique: elle généralise les situations (b)–(d), c'est encore une situation stable. Le théorème démontré dans [6] est plus fort (on calcule les indices de 0 pour chaque itéré de f), mais également sous des hypothèses plus fortes (on suppose que $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\bar{U}) = \{0\}$). Sous les hypothèses plus faibles de la Proposition 2, il se trouve que cette démonstration, ou plutôt la partie la plus simple de celle-ci, donne en fait la Proposition 2. Il nous a paru utile de dégager cette proposition dans la Section 7, qui apparaît un peu cachée dans [6].

Enfin le dernier résultat est un résultat de perturbation qui est une conséquence du théorème de Baire et qui implique clairement notre théorème. C'est en fait la seule partie vraiment nouvelle de cet article mais c'est celle qui nous permet de faire le pont entre le cas elliptique et le cas hyperbolique, nous la démontrerons dans la Section 6.

PROPOSITION 3. *Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 n'ayant que 0 comme point fixe. Si $i(f, 0) \neq 1$ et si f ne vérifie pas la conclusion du théorème, alors il existe $f^*: W \rightarrow W'$ vérifiant les mêmes hypothèses que f , uniformément proche de f et égal à f au voisinage de 0, qui vérifie les hypothèses de la Proposition 2; en particulier $i(f, 0) = i(f^*, 0) < 1$.*

Preuve du théorème à partir des propositions. Donnons-nous $f: W \rightarrow W'$ n'ayant que 0 comme point fixe, où W et W' sont simplement connexes. Considérons un domaine de Jordan U' dont l'adhérence est dans la composante connexe W'' de $W \cap f^{-1}(W)$ qui contient 0. Si l'ensemble $\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(\bar{U}')$ est d'intérieur non vide, il contient un domaine V disjoint de son image, deux cas sont alors possibles: soit la suite $(f^n(V))_{n \geq 0}$ est formée d'ensembles disjoints deux à deux et la conclusion (i) du théorème est vérifiée, soit ce n'est pas le cas, les hypothèses de la Proposition 1 sont alors vérifiées et on a $i(f, 0) = 1$. On a une situation similaire si $\bigcap_{k \leq 0} f^{-k}(\bar{U}')$ est d'intérieur non vide. Si nos deux ensembles sont d'intérieurs vides, la Proposition 3 entraîne que l'on peut perturber f en f^* sans changer le germe en 0 tel que l'intersection des ensembles $\bigcap_{k \geq 0} f^{*-k}(\bar{U}')$ et $\bigcap_{k \leq 0} f^{*-k}(\bar{U}')$ ne connecte pas 0 au bord de U' , et que l'on peut choisir un domaine de Jordan $U \subset U'$ contenant 0 avec $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{*-k}(\bar{U}) \subset U$. Par la Proposition 2, on obtient $i(f, 0) \leq 1$.

Dans le cas où f préserve l'aire, la situation est plus claire. Si l'ensemble $K = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\bar{U}')$ a de la mesure, il existe un point récurrent et nous sommes dans la situation elliptique; s'il ne rencontre pas la frontière de U' nous sommes dans la situation hyperbolique. Le seul vrai cas restant est le cas où la composante connexe de K qui contient 0 rencontre la frontière de U' et n'a pas de mesure: nous sommes alors dans une situation très instable et pouvons casser cette composante en perturbant f pour retomber dans le deuxième cas.

3. BONNES EXTENSIONS

Si $f: W \rightarrow W'$ est un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 et n'ayant que 0 comme point fixe, on appellera *bonne extension* du germe de f en 0 tout homéomorphisme du plan dont l'ensemble des points fixes est discret, dont tous les points fixes ont même indice, et dont le germe en l'un des points fixes est conjugué au germe de f en 0.

Voyons comment construire une bonne extension.

Soit W et W' deux domaines de Jordan contenant 0 et $f: \bar{W} \rightarrow \bar{W}'$ un homéomorphisme préservant l'orientation n'ayant que 0 comme point fixe. L'homéomorphisme f peut être prolongé en un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 de même nom. Considérons le complémentaire de l'ensemble des points fixes de f distincts de 0 et notons M la composante connexe de cet ensemble qui contient 0. Soit $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel, nous savons que \tilde{M} est topologiquement un plan. Fixons $z_0 \in \pi^{-1}(\{0\})$ et notons F l'unique relèvement de $f|_M$ à \tilde{M} qui fixe z_0 . L'ensemble Z des points fixes de F est contenu dans $\pi^{-1}(\{0\})$, c'est une partie discrète et non vide. De plus le germe de F en chaque point fixe est conjugué au germe de f en 0 et en particulier l'indice de Lefschetz en tout point fixe est égal à $i(f, 0)$: nous avons une bonne extension du germe de f en 0.

Supposons maintenant que $f: W \rightarrow W'$ vérifie les hypothèses de la Proposition 1. Quitte à restreindre très légèrement W et W' , nous pouvons supposer que ce sont des domaines de Jordan, que f se prolonge en un homéomorphisme sur les adhérences et faire la construction précédente. Si \tilde{W} est la composante connexe de $\pi^{-1}(W)$ qui contient z_0 , et si \tilde{V} est la composante connexe de $\pi^{-1}(V)$ contenue dans \tilde{W} , on a

$$F(\tilde{V}) \cap \tilde{V} = \emptyset \quad \text{et} \quad F^q(\tilde{V}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset.$$

4. MODIFICATIONS LIBRES

Nous notons \mathcal{H} le groupe des homéomorphismes du plan préservant l'orientation. Reappelons que le *support* de $f \in \mathcal{H}$ est l'adhérence de l'ensemble des points $z \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(z) \neq z$. Rappelons également qu'une partie X de \mathbf{R}^2 est une *partie libre* pour f si $f(X) \cap X = \emptyset$.

Nous dirons que $f^* \in \mathcal{H}$ est une *modification libre élémentaire* de $f \in \mathcal{H}$ si $f^* = f \circ h$, où le support de h est contenu dans un domaine libre de f . Nous dirons que $f^* \in \mathcal{H}$ est une *modification libre* de $f \in \mathcal{H}$ si l'on peut trouver f_0, f_1, \dots, f_n dans \mathcal{H} , avec $f_0 = f$ et $f_n = f^*$, et tels que chaque, f_i , $0 < i \leq n$, est une modification libre élémentaire de f_{i-1} .

Remarquons que si f^* est une modification libre élémentaire de f , ces deux applications ont mêmes point fixes, et que les indices de Lefschetz des points fixes isolés sont inchangés. Ceci est donc encore vrai si f^* est une modification libre de f .

5. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1

Nous nous fixons dans ce Section une partie discrète Z de \mathbf{R}^2 ainsi qu'un entier $s \neq 1$. Nous notons \mathcal{H}_0 l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{H}$ dont Z est l'ensemble des points fixes et tels que, pour tout $z \in Z$, on a $i(f, z) = s$.

Nous avons les résultats suivants.

- (i) *Toute modification libre d'un élément de \mathcal{H}_0 est encore dans \mathcal{H}_0 .* Ce n'est rien d'autre que la remarque finale de la Section précédente.

- (ii) *Les points périodiques de $f \in \mathcal{H}_0$ sont les points fixes de f . C'est le lemme de Brouwer sur les arcs de translation (voir [2–5]). Si $f \in \mathcal{H}$ a une orbite périodique de période $q \geq 2$, il existe une courbe de Jordan C le long de laquelle l'indice du champ de vecteurs $z \mapsto f(z) - z$ est bien défini et égal à 1. Si l'ensemble des points fixes de f est discret, l'entier 1 représente la somme des indices des points fixes contenus dans le domaine de Jordan bordé par C . Puisque $s \neq 1$, une telle situation est impossible si f appartient à \mathcal{H}_0 .*
- (iii) *Tout domaine libre V de $f \in \mathcal{H}_0$ est errant. En particulier les seuls points non-errants de $f \in \mathcal{H}_0$ sont les points fixes. C'est encore le lemme de Brouwer. Si V est un domaine libre non errant, on peut considérer le premier entier strictement positif $q \geq 2$ tel que $f^q(V) \cap V \neq \emptyset$. Si $z \in f^q(V) \cap V$, on peut trouver un arc γ joignant z à $f^{-q}(z)$ contenu dans V , puis un homéomorphisme h à support compact contenu dans V et proche de γ qui vérifie $h(z) = f^{-q}(z)$. L'homéomorphisme $f^* = f \circ h$ appartient à \mathcal{H}_0 et a un point périodique z de période q , ce qui est impossible.*

La remarque précédente et la Section 3 nous donne clairement la Proposition 1.

6. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3

Nous gardons dans cette Section notre ensemble Z , notre entier $s \neq 1$ et nous munissons l'ensemble \mathcal{H} de la topologie compacte-ouverte. Nous nous donnons un domaine de Jordan U' contenant un point z_0 de Z et tel que $\bar{U}' \cap Z = \{z_0\}$. Nous définissons alors, pour tout $f \in \mathcal{H}_0$, les ensembles compacts

$$K^+(f) = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(\bar{U}'), \quad K^-(f) = \bigcap_{k \leq 0} f^{-k}(\bar{U}'), \quad K(f) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\bar{U}').$$

L'ensemble $K^+(f)$ (resp. $K^-(f)$, $K(f)$) est le plus grand ensemble positivement invariant (resp. négativement invariant, globalement invariant) contenu dans \bar{U}' .

Nous définissons alors l'ensemble \mathcal{H}_1 formé des homéomorphismes $f \in \mathcal{H}_0$ tels que $K^-(f)$ et $K^+(f)$ sont d'intérieur vide, c'est-à-dire tels que $K^-(f) \cup K^+(f)$ est d'intérieur vide.

Nous avons les résultats suivants.

(i) *Si on munit l'ensemble des parties compactes non-vides de \mathbf{R}^2 de la distance de Hausdorff, les applications*

$$f \mapsto K^+(f), \quad f \mapsto K^-(f) \text{ et } f \mapsto K(f)$$

définies sur \mathcal{H}_0 sont semi-continues supérieurement.

La démonstration est évidente, étudions le premier cas: si $K^+(f)$ est contenu dans une partie ouverte O et si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de \mathcal{H}_0 convergeant vers f telle que $K^+(f_n) \not\subset O$, alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(K^+(f_n))_{n \geq 0}$ converge vers une partie compacte K contenue dans \bar{U}' . Celle-ci rencontre le complémentaire de O et est positivement invariante par f , elle est donc contenue dans $K^+(f)$, ce qui est impossible.

(ii) *Si $K^+(f)$ (resp. $K^-(f)$) est d'intérieur non vide, il existe un domaine V tel que la suite $(f^n(V))_{n \geq 0}$ (resp. $(f^n(V))_{n \leq 0}$) est formée de parties disjointes contenues dans U' .*

En effet tout point dans l'intérieur de $K^+(f)$ (resp. $K^-(f)$) admet un voisinage ouvert connexe et libre contenu dans $K^+(f)$ (resp. $K^-(f)$) et ce voisinage est errant.

(iii) Si $f^* = f \circ h$ est une modification libre élémentaire de $f \in \mathcal{H}_0$, où le support de h est contenu dans un domaine libre V de f , on a :

$$K^-(f^*) \cap V = K^-(f) \cap V$$

$$K^+(f^*) \cap V = h^{-1}(K^+(f) \cap V) \cap \bar{U}'.$$

En effet, le domaine V étant errant, si z appartient à V les suites $(f^{*n}(z))_{n \leq 0}$ et $(f^n(z))_{n \leq 0}$ sont égales, de même que les suites $(f^{*n}(z))_{n \geq 1}$ et $(f^n(h(z)))_{n \geq 1}$.

(iv) Toute modification libre d'un élément de \mathcal{H}_1 est encore dans \mathcal{H}_1 .

Il suffit de démontrer que si $f^* = f \circ h$ est une modification libre élémentaire de $f \in \mathcal{H}_1$, où le support de h est contenu dans un domaine libre V de f , alors f^* appartient à \mathcal{H}_1 . Les parties ouvertes $O^+ = \text{Int}(K^+(f^*))$ et $O^- = \text{Int}(K^-(f^*))$ sont respectivement positivement et négativement invariantes par f^* . La remarque précédente nous dit que $O^- \cap V$ et $O^+ \cap V$ sont contenues respectivement dans $K^-(f)$ et dans $h^{-1}(K^+(f))$. Comme ces parties sont ouvertes et comme f appartient à \mathcal{H}_1 , elles sont vides. Puisque f et f^* coïncident en dehors de V , on a $f(O^+) = f^*(O^+) \subset O^+$. Ainsi O^+ est une partie positivement invariante par f contenue dans \bar{U}' , elle est donc contenue dans $K^+(f)$, et comme ce dernier ensemble est d'intérieur vide, on a $O^+ = \emptyset$. De même, on a

$$O^- \cap f(V) = O^- \cap f^*(V) \subset f^*(O^-) \cap f^*(V) = f^*(O^- \cap V) = \emptyset,$$

et comme f^{*-1} et f^{-1} coïncident en dehors de $f(V)$, on en déduit que l'on a $f^{-1}(O^-) = f^{*-1}(O^-) \subset O^-$, puis comme précédemment que O^- est vide.

Nous allons démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3'. *Si f appartient à \mathcal{H}_1 , il existe une modification libre f^* de f aussi proche que l'on veut de f , égale à f au voisinage de z_0 , et un domaine de Jordan $U \subset U'$ tel que $K(f^*) \cap \partial U = \emptyset$.*

Démonstration. On notera, B_r (resp. S_r) la boule ouverte (resp. la sphère) de centre 0 et de rayon $r > 0$. Grâce au théorème de Schoënfliès, on peut toujours supposer que $U' = B_1$ et que $z_0 = 0$. On représentera tout point de \mathbf{R}^2 par ses coordonnées polaires (θ, r) . On appellera *arc* tout ensemble de la forme $I \times \{r\}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} ; on appellera *segment* tout ensemble de la forme $\{\theta\} \times J$, où J est un intervalle de $]0, +\infty[$; on appellera *rectangle polaire* ou plus simplement *rectangle* tout ensemble de la forme $I \times J$, où I est un intervalle de \mathbf{R} et J un intervalle de $]0, +\infty[$.

Commençons par démontrer le lemme élémentaire suivant.

LEMME. *Pour tout $f \in \mathcal{H}_1$, l'ensemble $X(f)$ des réels $r \in]0, 1[$ tels que $(K^-(f) \cup K^+(f)) \cap S_r$ est d'intérieur vide dans S_r est un G_δ dense de $]0, 1[$.*

Démonstration. Pour tout couple (k, n) d'entiers vérifiant $n \geq 2$ et $0 \leq k < n$, on définit l'ensemble $Y_{k,n}$ des réels $r \in]0, 1[$ tels que $K^-(f) \cup K^+(f)$ contient l'arc $[2k\pi/n, 2(k+1)\pi/n] \times \{r\}$: c'est une partie fermée de $]0, 1[$ d'intérieur vide. Comme $]0, 1[$ est un

espace de Baire et comme $X(f)$ n'est rien d'autre que le complémentaire de $\bigcup_{2 \leq n, 0 \leq k < n} Y_{k,n}$, le lemme suit. \square

Considérons f_0 satisfaisant les hypothèses de la Proposition 3' et fixons $r_0 \in X(f_0)$. Comme f_0 n'a pas de point fixe sur S_{r_0} et comme $(K^-(f_0) \cup K^+(f_0)) \cap S_{r_0}$ est d'intérieur vide dans S_{r_0} , on peut trouver une famille $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n \geq 2$, de réels vérifiant

$$\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \theta_0 + 2\pi$$

tels pour tout $0 \leq i \leq n$, on a

$$(\theta_i, r_0) \notin K^-(f_0) \cup K^+(f_0)$$

et tel que chaque arc $[\theta_i, \theta_{i+1}] \times \{r_0\}$, $0 \leq i < n$, est libre.

Si $\varepsilon \in]0, r_0[$ est choisi assez petit, tous les rectangles

$$R_i = [\theta_i, \theta_{i+1}] \times [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

seront libres, et tous les segments

$$S_i = \{\theta_i\} \times [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

disjoints de $K^-(f_0) \cup K^+(f_0)$.

Fixons maintenant un entier $N \geq 2$ et considérons une famille $(\eta_j)_{0 \leq j \leq N}$ de réels vérifiant

$$\theta_0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = \theta_1$$

tels que pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$, on a

$$\eta_{j+1} - \eta_j \leq 2\pi/N$$

et tels que pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$(\eta_j, r_0) \notin K^-(f_0) \cup K^+(f_0).$$

On construit facilement un homéomorphisme φ_0 de $[\theta_0, \theta_1]$, égal à l'identité au voisinage de θ_0 et de θ_1 , laissant fixe chaque η_j et envoyant les autres points suffisamment à droite pour que la propriété suivante soit vérifiée:

si (θ, r_0) appartient à $K^-(f_0)$, alors $(\varphi_0(\theta), r_0)$, n'appartient pas à $K^+(f_0)$.

On considère alors l'homéomorphisme du plan h_0 défini sur $[\theta_0, \theta_1] \times [r_0 - \varepsilon/2, r_0 + \varepsilon/2]$ par l'égalité

$$h_0(\theta, r_0 + t) = ((2|t|/\varepsilon)\theta + (1 - 2|t|/\varepsilon)\varphi_0(\theta), r_0 + t),$$

et égal à l'identité en dehors de ce rectangle. Le support de h_0 est contenu dans l'intérieur de R_0 qui est un domaine libre de f_0 , ainsi $f_1 = f_0 \circ h_0$ est une modification libre élémentaire de f_0 et appartient donc à \mathcal{H}_1 (Fig. 2).

Quand N est grand, l'application f_1 est proche de f_0 (indépendamment du choix des η_j) et comme les applications $f \mapsto K^-(f)$ et $f \mapsto K^+(f)$ sont semi-continues supérieurement, chaque segment S_i est encore disjoint de $K^-(f_1) \cup K^+(f_1)$. On sait d'autre part que chaque rectangle R_i est encore libre pour f_1 , et aussi, grâce à la remarque (iii) faite plus haut, que $K(f_1) \cap ([\theta_0, \theta_1] \times \{r_0\}) = \emptyset$.

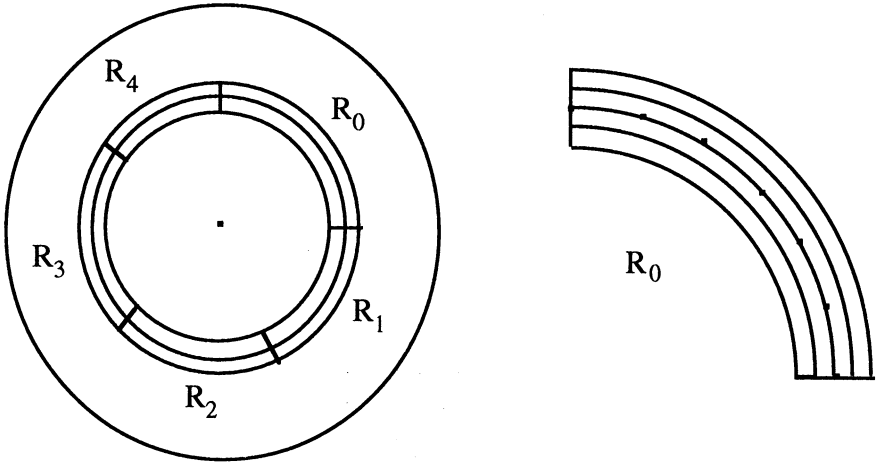


Fig. 2.

On choisit ensuite $r_1 \in X(f_1) \cap]r_0 - \varepsilon/2, r_0 + \varepsilon/2[$ assez proche de r_0 pour que l'on ait $K(f_1) \cap ([\theta_0, \theta_1] \times \{r_1\}) = \emptyset$ et on recommence le raisonnement précédent: on construit une modification libre élémentaire $f_2 = f_1 \circ h_1$ de f_1 , où le support de h_1 est dans l'intérieur de R_1 , tel que $K(f_2) \cap ([\theta_1, \theta_2] \times \{r_1\}) = \emptyset$, suffisamment proche de f_1 pour que chaque segment S_i soit disjoint de $K^-(f_2) \cup K^+(f_2)$, on peut également choisir f_2 assez proche de f_1 pour avoir $K(f_2) \cap ([\theta_0, \theta_1] \times \{r_1\}) = \emptyset$.

Par une récurrence immédiate, on construit une famille de réels $(r_i)_{0 \leq i < n}$, et une famille d'homéomorphismes $(h_i)_{0 \leq i < n}$, où h_i est à support dans l'intérieur de R_i , tels que si la famille $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$ est définie par la relation $f_{i+1} = f_i \circ h_i$, alors chaque R_j est un rectangle libre pour chaque f_i , chaque segment S_j est disjoint de $K^-(f_i) \cup K^+(f_i)$, et tel que $K(f_i) \cap ([\theta_0, \theta_i] \times \{r_{i-1}\}) = \emptyset$. En particulier f_n est une modification libre de f_0 et $K(f_n)$ est disjoint de $S_{r_{n-1}}$. On choisit donc $U = B_{r_{n-1}}$. \square

Nous obtenons la Proposition 3 en utilisant encore la Section 3 et en remarquant que dans la démonstration précédente, chaque rectangle R_i est contenu dans U' . Comme U est inclus dans U' , on a

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{*-k}(\bar{U}) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{*-k}(\bar{U}')$$

les hypothèses de la Proposition 2 sont donc bien vérifiées par f^* .

7. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2

Tous les arguments qui suivent se trouvent dans [6]. Rappelons que toute courbe de Jordan C est naturellement orientée et notons $(a, b)_C$ l'arc ouvert orienté issu de a et aboutissant en b , pour tous points a et b de C .

Commençons par rappeler certaines propriétés des domaines de Jordan dues à Kérékjártó.

Si U et U' sont deux domaines de Jordan contenant 0, alors la composante connexe de $U \cap U'$ qui contient 0 est un domaine de Jordan noté $U \wedge U'$. On obtient ainsi une

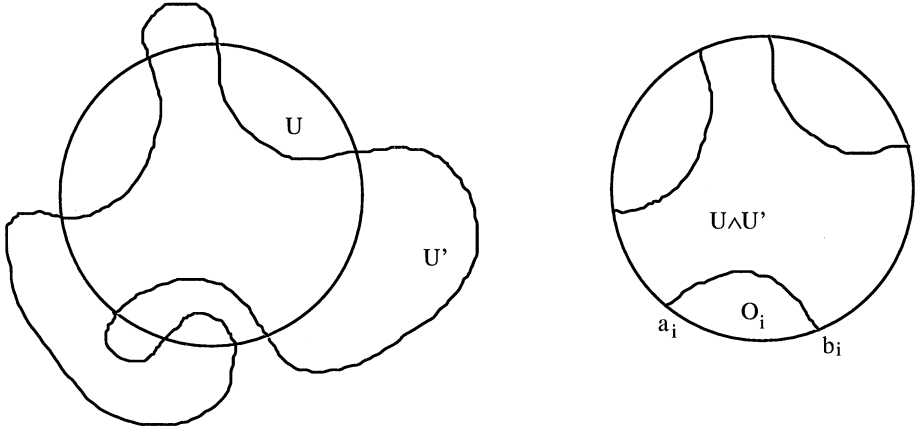


Fig. 3.

opération commutative et associative sur l'ensemble des domaines de Jordan contenant 0, qui commute avec tout homéomorphisme du plan fixant 0. Si $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de domaines de Jordan contenant 0, la composante connexe de $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$ qui contient 0 est un domaine de Jordan, noté $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} U_i$, dont la frontière est contenue dans $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \partial U_i$.

Précisons un peu la situation dans le cas de deux domaines de Jordan U et U' tels que U ne contient ni n'est contenu dans U' , notons alors C , C' et C'' les frontières respectives de U , U' et $U \wedge U'$ (Fig. 3).

Les composantes connexes de $C'' - C$ déterminent une famille non vide $((a_i, b_i)_{C'})_{i \in I}$ au plus dénombrable d'arcs de C' , où a_i et b_i sont des points distincts de $C \cap C' \cap C''$. La famille $((a_i, b_i)_{C'})_{i \in I}$ représente alors les composantes connexes de $C - C''$. Chaque ensemble $(a_i, b_i)_{C'} \cup (a_i, b_i)_{C'} \cup \{a_i, b_i\}$ est une courbe de Jordan délimitant un domaine de Jordan O_i ne contenant pas 0. La famille $(O_i)_{i \in I}$ représente les composantes connexes de $U - \overline{U \wedge U'}$; la famille $(O_i \cup (a_i, b_i)_{C'})_{i \in I}$ les composantes connexes de $U - U \wedge U'$; la famille $(O_i \cup (a_i, b_i)_{C'})_{i \in I}$ les composantes connexes de $\bar{U} - \overline{U \wedge U'}$. On a donc une bijection naturelle entre les composantes connexes de cinq ensembles. Remarquons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'ensembles O_i de diamètre $\geq \varepsilon$.

Démonstration de la Proposition 2. On se donne $f: W \rightarrow W'$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 2. On peut toujours prolonger la restriction de f à \bar{U} au plan tout entier et supposer donc que f est défini sur \mathbf{R}^2 .

S'il existe un domaine de Jordan $U' \subset W$ positivement (resp. négativement) invariant par un itéré f^m , $m \geq 1$, le domaine de Jordan $\bigwedge_{0 \leq i < m} f^i(U')$ est alors positivement (resp. négativement) invariant et nous savons que l'indice est 1. Nous supposons donc que de telles situations sont impossibles.

Il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que l'on a

$$\bigcap_{|k| \leq n_0} f^{-k}(\bar{U}) \subset U.$$

Considérons alors le domaine de Jordan

$$U_0 = \bigwedge_{0 \leq j < n_0} f^{-j}(U)$$

définissons pour tout entier $n \geq 0$, le domaine

$$U_n = \bigcap_{0 \leq j \leq n} f^{-j}(U_0) = \bigcap_{0 \leq j < n+n_0} f^j(U)$$

et notons C_n la frontière de U_n .

LEMME 1. (a) Pour tout $n \geq 0$, on a $U_n = U_0 \wedge f^{-n}(U_0)$.

(b) Pour tout $n > n_0$ et pour tout $z \in C_n \cap U_0$, le point $f(z)$ appartient à U_0 et n'appartient pas à U_n .

(c) Pour tout $n \geq 1$, la courbe $f(C_n)$ est contenue dans \bar{U}_0 .

Démonstration: (a) La relation $U_n = U_0 \wedge f^{-n}(U_0)$ est clairement vérifiée pour $n \leq n_0$, de même que l'inclusion $U_n \subset U_0 \wedge f^{-n}(U_0)$ pour tout $n \geq 0$. Il reste à montrer que cette inclusion n'est pas stricte dans le cas où $n > n_0$, et donc à montrer que la frontière du premier domaine est disjointe du second domaine. Un point $z \in \partial U_n$ appartient à $f^{-k}(\partial U)$ pour un certain $k \in \{0, \dots, n + n_0 - 1\}$, mais comme, par définition de n_0 , on a

$$\bar{U}_n \subset \bigcap_{0 \leq j < n+n_0} f^{-j}(\bar{U}) \subset \bigcap_{n_0 \leq j < n} f^{-j}(U)$$

l'entier k appartient en fait à $\{0, \dots, n_0 - 1\} \cup \{n, \dots, n + n_0 - 1\}$. Si $k \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$, le point z n'appartient pas à U_0 ; si $k \in \{n, \dots, n + n_0 - 1\}$, il n'appartient pas à $f^{-n}(U_0)$.

(b) Fixons $z \in \bar{U}_n \cap U_0$. Puisque z appartient à U_0 , il n'appartient à la frontière d'aucun $f^{-j}(U)$, $1 \leq j < n_0$, or on vient de voir qu'il n'appartient pas non plus à la frontière de $f^{-n_0}(U)$ puisqu'il appartient à \bar{U}_n et que $n > n_0$. Le point z , qui appartient à l'adhérence du domaine $\bigcap_{1 \leq j \leq n_0} f^{-j}(U)$ (puisque $z \in \bar{U}_n$), n'appartient donc pas à sa frontière: il appartient donc au domaine lui-même et $f(z)$ appartient à U_0 .

La fait que $f(z)$ n'appartient pas à U_n est très simple à démontrer et encore vrai pour tout $n \geq 1$. En effet le point z , qui appartient à C_n et pas à C_0 , appartient à la frontière d'un ensemble $f^{-k}(U_0)$, $1 \leq k \leq n$, ainsi $f(z)$ n'appartient ni à $\bigcap_{0 \leq k < n} f^{-k}(U_0)$ ni même a fortiori à U_n .

(c) Le résultat est évident puisque le domaine $f(U_n)$ est contenu dans U_0 . □

Fixons maintenant $n > n_0$. Par l'assertion (a) du Lemme 1, on peut noter $((a_i, b_i)_{f^{-n}(C_0)})_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de $C_n - C_0$. L'image par f d'un arc $\gamma_i = (a_i, b_i)_{f^{-n}(C_0)}$ est contenue dans $U_0 - U_n$ d'après l'assertion (b) du Lemme 1, et plus précisément dans une composante connexe de cet ensemble que l'on peut écrire $Q_{i'} \cup (a_{i'}, b_{i'})_{f^{-n}(C_0)}$, en gardant les notations du début de la Section. On obtient une application ϕ de I dans I en posant $i' = \phi(i)$. Du fait qu'il existe un nombre fini de O_i de diamètre $\geq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et du fait que f n'a pas de point fixe sur C_0 , nous déduisons que ϕ a un nombre fini de points fixes (Fig. 4).

La Proposition 2 est alors une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 2. L'indice de f le long de C_n est égal à $1 - p$, où p est le nombre de points fixes de ϕ .

Démonstration. On peut construire un homéomorphisme h entre C_0 et C_n préservant l'orientation, envoyant chaque arc $(a_i, b_i)_{C_0}$ sur $(a_i, b_i)_{C_n}$ et laissant fixe chaque point de

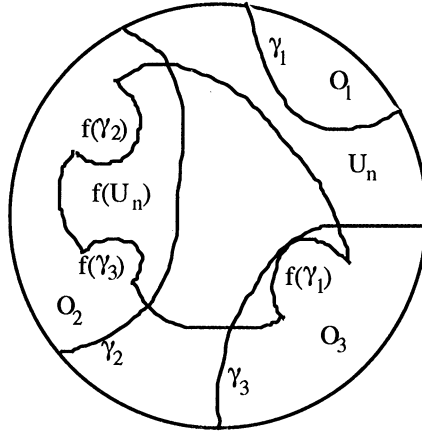


Fig. 4.

$C_0 \cap C_n$. On peut définir un champ de vecteurs continu ξ sur $C_0 \cup C_n$ en posant $\xi(z) = f(z) - z$ si $z \in C_n$ et $\xi(z) = f(h(z)) - z$ si $z \in C_0$. Ce champ ne s'annule pas sur C_n ni même sur C_0 puisque pour tout $z \in C_0 - C_n$ le point $f(h(z))$ appartient à U_0 .

L'assertion (c) du Lemme 1 nous dit que pour tout $z \in C_0$, le point $f(h(z))$ appartient à \bar{U}_0 , on a donc

$$i(\xi, C_0) = 1.$$

Puisque $\xi(z) + z$ appartient à $\overline{Q_{\varphi(i)}}$ pour tout $z \in \partial O_i$ et que $O_{\varphi(i)}$ et O_i sont disjoints si $\varphi(i) \neq i$, on a également

$$\begin{aligned} i(\xi, \partial O_i) &= 1 \quad \text{si } \varphi(i) = i \\ &= 0 \quad \text{si } \varphi(i) \neq i. \end{aligned}$$

Le lemme découle alors de l'égalité

$$i(\xi, C_n) = i(\xi, C_0) - \sum_{i \in I} i(\xi, \partial O_i).$$

□

REFERENCES

1. Bonino, M., Thèse, Université de Grenoble 1, 1997.
2. Brouwer, L. E. J., Beweis des ebenen translationssatzes. *Mathematische Annalen*, 1912, **72**, 37–54.
3. Brown, M., A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *Houston Journal of Mathematics*, 1984, **10**, 35–41.
4. Fathi, A., An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *L'enseignement Mathématique*, 1987, **33**, 315–322.
5. Guillou, L., Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré–Birkhoff. *Topology*, 1994, **33**, 331–351.
6. Le Calvez, P. and Yoccoz, J.-C., Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Annals of Mathematics*, 1997, **146**, 241–293.
7. Nikishin, N. A., Fixed points of diffeomorphisms of two-dimensional spheres preserving an oriented plane. *Funktsional Anal. i Prilozhen*, 1974, **8**, 84–85.
8. Pelikan, S. and Slaminka, E., A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds. *Ergodic Theory of Dynamical Systems*, 1987, **7**, 463–479.
9. Simon, C. P., A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics. *Inventiones Mathematicae*, 1974, **26**, 187–200.

10. Schmitt, B., Index de Seifert et systèmes différentiels à coefficients périodiques. Thèse, Université de Strasbourg, 1973.
11. Schmitt, B., L'espace des homéomorphismes du plan qui admettent un seul point fixe d'indice donné est connexe par arcs. *Topology*, 1979, **18**, 235–240.
12. Slaminka, E., Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two-manifolds. *Transactions of American Mathematical Society*, 1993, **340**, 429–445.

Laboratoire Analyse

Géométrie et Applications

UMR CNRS 7539

Institut Galilée, Université Paris Nord

93430 Villetaneuse

France